3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ $2^{ου}$ ΒΑΘΜΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Η γενική μορφή της β–βάθμιας εξίσωσης

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \quad \alpha \neq 0$

2.

Οι λύσεις της β–βάθμιας εξίσωσης

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \quad \alpha \neq 0$
Όταν $\Delta > 0$	Έχει δύο ρίζες άνισες, τις $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
Όταν $\Delta = 0$	Έχει μία διπλή ρίζα, τη $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$
Όταν $\Delta < 0$	Είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$

3.

Τύποι Vieta

$S = x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ και $P = x_1 x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$

4.

Β-βάθμια εξίσωση από το S και το P των ριζών της

$x^2 - Sx + P = 0$

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Σημαντική λεπτομέρεια

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ είναι β-βάθμια μόνο όταν $\alpha \neq 0$.
Για $\alpha = 0$, η εξίσωση γίνεται $\beta x + \gamma = 0$, δηλαδή είναι α-βάθμια.

2.

Ισχύουν τα αντίστροφα

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$

- αν έχει δύο ρίζες άνισες, τότε $\Delta > 0$
- αν έχει μία ρίζα διπλή, τότε $\Delta = 0$
- αν είναι αδύνατη, τότε $\Delta < 0$

3.

Για να λύσουμε μια δευτεροβάθμια εξίσωση, δε χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους, αλλά μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος.

4.

Επέκταση των τύπων Vieta

(Να γνωρίζουμε τη διαδικασία και όχι να τους αποστηθίσουμε)

i) $$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 2\frac{\gamma}{\alpha}$$

ii) $$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 - 3\frac{\gamma}{\alpha}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = -\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 + \frac{3\beta\gamma}{\alpha^2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να βρείτε, για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $(2\mu - 3)x^2 - \mu x + 4 = 0$ είναι δευτεροβάθμια.

Προτεινόμενη λύση

Πρέπει $2\mu - 3 \neq 0 \iff 2\mu \neq 3 \iff \mu \neq \frac{3}{2}$

Σχόλιο 1

2.

Να βρείτε, για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $(2\mu - 3)x^2 - \mu x + 4 = -x^2 + 1$ είναι δευτεροβάθμια.

Προτεινόμενη λύση

Η εξίσωση γράφεται
$$(2\mu - 3)x^2 - \mu x + 4 + x^2 - 1 = 0$$
$$(2\mu - 3 + 1)x^2 - \mu x + 3 = 0$$
$$(2\mu - 2)x^2 - \mu x + 3 = 0$$

Σχόλιο 3

Πρέπει $2\mu - 2 \neq 0 \iff 2\mu \neq 2 \iff \mu \neq 1$

Σχόλιο 1

3.

Να λυθεί η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x - 3\lambda^2 = 0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

Προτεινόμενη λύση

$\Delta = (2\lambda)^2 - 4\cdot 1\,(-3\lambda^2) = 4\lambda^2 + 12\lambda^2 = 16\lambda^2 \geq 0$

$$x = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{16\lambda^2}}{2\cdot 1} = \frac{-2\lambda \pm 4\lambda}{2\cdot 1} = \frac{-2\lambda + 4\lambda}{2} \text{ ή } \frac{-2\lambda - 4\lambda}{2}$$
$$= \frac{2\lambda}{2} \text{ ή } \frac{-6\lambda}{2}$$
$$= \lambda \text{ ή } -3\lambda$$

4.

Να λυθεί η εξίσωση $3x^2 - 4\lambda x + \lambda^2 = 0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

Προτεινόμενη λύση

$\Delta = (-4\lambda)^2 - 4\cdot 3\lambda^2 = 16\lambda^2 - 12\lambda^2 = 4\lambda^2 \geq 0$

$$x = \frac{4\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2}}{2\cdot 3} = \frac{4\lambda \pm 2\lambda}{6} = \frac{4\lambda + 2\lambda}{6} \text{ ή } \frac{4\lambda - 2\lambda}{6}$$
$$= \frac{6\lambda}{6} \text{ ή } \frac{2\lambda}{6}$$
$$= \lambda \text{ ή } \frac{\lambda}{3}$$

5.

Να λυθεί η εξίσωση $(\lambda - 1)x^2 - 2x + 1 = 0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 1

- Όταν $\lambda - 1 = 0$, δηλαδή όταν $\lambda = 1$.

  Η εξίσωση γίνεται $0 \cdot x^2 - 2x + 1 = 0$

  $$-2x = -1$$
  $$x = \frac{1}{2}$$

- Όταν $\lambda - 1 \neq 0$, δηλαδή όταν $\lambda \neq 1$.

  $\Delta = (-2)^2 - 4(\lambda - 1)\cdot 1 = 4 - 4\lambda + 4 = 8 - 4\lambda = 4(2 - \lambda)$

  α) αν $\Delta > 0$, δηλαδή αν $2 - \lambda > 0$

  δηλαδή αν $\lambda < 2$

  τότε $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4(2-\lambda)}}{2(\lambda - 1)} = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{2-\lambda}}{2(\lambda-1)} = \dfrac{1 \pm \sqrt{2-\lambda}}{\lambda - 1}$

  β) αν $\Delta = 0$, δηλαδή αν $2 - \lambda = 0$

  δηλαδή αν $\lambda = 2$

  τότε $x = -\dfrac{-2}{2(\lambda-1)} = \dfrac{1}{\lambda-1} = \dfrac{1}{2-1} = 1$

  γ) αν $\Delta < 0$, δηλαδή αν $2 - \lambda < 0$

  δηλαδή αν $\lambda > 2$

  τότε η εξίσωση είναι αδύνατη

6.

Να λυθεί η εξίσωση $\lambda^2 x^2 + 2\lambda x + 1 - \lambda^2 = 0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 1

- Όταν $\lambda^2 = 0$, δηλαδή όταν $\lambda = 0$.

  Η εξίσωση γίνεται $0 \cdot x^2 + 2x + 1 - 0 = 0$

  $$2x = -1$$
  $$x = -\frac{1}{2}$$

- Όταν $\lambda^2 \neq 0$, δηλαδή όταν $\lambda \neq 0$.

  $\Delta = (2\lambda)^2 - 4\lambda^2(1 - \lambda^2) = 4\lambda^2 - 4\lambda^2 + 4\lambda^4 = 4\lambda^4 > 0$

  Τότε $x = \dfrac{-2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^4}}{2\lambda^2} = \dfrac{-2\lambda \pm 2\lambda^2}{2\lambda^2} = \dfrac{-1 \pm \lambda}{\lambda}$

7.

Αν $4x^2 - 8xy - 5y^2 = 0$, να βρεθεί ο x συναρτήσει του y.

Προτεινόμενη λύση

Θεωρούμε την υπόθεση σαν εξίσωση με άγνωστο x.

$$\Delta = (-8y)^2 - 4\cdot 4\cdot(-5y^2) = 64y^2 + 80y^2 = 144y^2 \geq 0$$

$$x = \frac{8y \pm \sqrt{144y^2}}{8} = \frac{8y \pm 12y}{8} \Leftrightarrow \quad x = \frac{20y}{8} \quad \text{ή} \quad x = -\frac{4y}{8}$$

$$x = \frac{5}{2}y \quad \text{ή} \quad x = -\frac{1}{2}y$$

8.

Να αποδειχθεί ότι η διαφορά των ριζών της εξίσωσης $x^2 - 2(\alpha + 1)x + \alpha^2 + 2\alpha = 0$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, είναι ανεξάρτητη από το α.

Προτεινόμενη λύση

Δεν έχουμε τύπο να μας δίνει τη διαφορά των ριζών, άρα πρέπει να τις βρούμε.

$$\Delta = [-2(\alpha + 1)]^2 - 4(\alpha^2 + 2\alpha)$$

$$= 4(\alpha^2 + 2\alpha + 1) - 4(\alpha^2 + 2\alpha)$$

$$= 4(\alpha^2 + 2\alpha + 1 - \alpha^2 - 2\alpha) = 4\cdot 1 = 4$$

$$x = \frac{2(\alpha+1) \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{2(\alpha+1) \pm 2}{2} = \alpha + 1 \pm 1.$$

Άρα $x_1 = \alpha + 1 + 1 = \alpha + 2$ και $x_2 = \alpha + 1 - 1 = \alpha$

Οπότε $x_1 - x_2 = \alpha + 2 - \alpha = 2$

9.

Να αποδειχθεί ότι, η εξίσωση $x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Προτεινόμενη λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\Delta > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\Delta = (2\lambda - 1)^2 - 4\cdot 1(\lambda - 1)$$

$$= 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 - 4\lambda + 4$$

$$= 4\lambda^2 - 8\lambda + 4 + 1$$

$$= 4(\lambda^2 - 2\lambda + 1) + 1 = 4(\lambda - 1)^2 + 1 > 0$$

10.

Για τον $\alpha > 0$ και τον $\beta \neq 0$ δίνεται ότι $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + 2\sqrt{\alpha}\,x + \beta = 0$ έχει διπλή ρίζα

Προτεινόμενη λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\Delta = 0$

$$(2\sqrt{\alpha})^2 - 4\beta = 0$$

$$4\alpha - 4\beta = 0$$

$$\alpha - \beta = 0$$

Η υπόθεση $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 2\alpha\beta$

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = 0$$

$$(\alpha - \beta)^2 = 0 \Rightarrow \alpha - \beta = 0$$

11.

Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε, η εξίσωση $x^2 - (\lambda^2 + 3)x + 4\lambda - 1 = 0$ να έχει ρίζα τον αριθμό 1.

Προτεινόμενη λύση

Ο αριθμός 1 ρίζα της εξίσωσης $\Rightarrow$ την επαληθεύει

Ρίζα εξίσωσης λέγεται κάθε αριθμός που την επαληθεύει

$$1^2 - (\lambda^2 + 3)\cdot 1 + 4\lambda - 1 = 0$$
$$1 - \lambda^2 - 3 + 4\lambda - 1 = 0$$
$$-\lambda^2 + 4\lambda - 3 = 0$$
$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$\delta = (-4)^2 - 4\cdot1\cdot3 = 16 - 12 = 4$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1$$

$\lambda = 3$ ή $\lambda = 1$

- Για $\lambda = 3$ η δοσμένη εξίσωση γίνεται $x^2 - (3^2 + 3)x + 4\cdot3 - 1 = 0$

  $x^2 - 12x + 11 = 0$

  $\Delta = (-12)^2 - 4\cdot1\cdot11 = 144 - 44 = 100$ $\quad x = \frac{12 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{12 \pm 10}{2} = 6 \pm 5$

  $x = 11$ ή $x = 1$

  Επομένως, για $\lambda = 3$ η δοσμένη εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό 1.

- Για $\lambda = 1$ η δοσμένη εξίσωση γίνεται $x^2 - (1^2 + 3)x + 4\cdot1 - 1 = 0$

  $x^2 - 4x + 3 = 0$

  $\Delta = (-4)^2 - 4\cdot1\cdot3 = 16 - 12 = 4$ $\quad x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1$

  $x = 3$ ή $x = 1$

  Επομένως, για $\lambda = 1$ η δοσμένη εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό 1.

Τελικά, ο ζητούμενος λ είναι $\lambda = 3$ ή $\lambda = 1$.

12.

Με υπόθεση ότι μία ρίζα της εξίσωσης $x^2 – (λ + 1)x + λ^2 – 10 = 0$ είναι ο αριθμός 2, να βρείτε την άλλη.

Προτεινόμενη λύση

Ο αριθμός 2 είναι ρίζα της εξίσωσης $\Rightarrow$ την επαληθεύει

> Ρίζα εξίσωσης λέγεται κάθε αριθμός που την επαληθεύει

$$2^2 – (λ + 1)2 + λ^2 – 10 = 0$$

$$4 – 2λ – 2 + λ^2 – 10 = 0$$

$$λ^2 – 2λ – 8 = 0$$

$δ = (–2)^2 – 4·1\,(–8) = 4 + 32 = 36$

$$λ = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = 1 \pm 3$$

$λ = 4$ ή $λ = –2$

- Για $λ = 4$ η δοσμένη εξίσωση γίνεται $x^2 – (4 + 1)x + 4^2 – 10 = 0$
  $x^2 – 5x + 6 = 0$
  $x = 2$ ή $x = 3$
  Άρα για $λ = 4$, η άλλη ρίζα της δοσμένης εξίσωσης είναι ο 3.

- Για $λ = –2$ η δοσμένη εξίσωση γίνεται $x^2 – (–2 + 1)x + (–2)^2 – 10 = 0$
  $x^2 + x – 6 = 0$
  $x = 2$ ή $x = –3$
  Άρα για $λ = 4$, η άλλη ρίζα της δοσμένης εξίσωσης είναι ο –3.

13.

Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + βx + γ = 0$, συναρτήσει των β, γ να βρείτε δευτεροβάθμια εξίσωση που να έχει ρίζες $ρ_1 = – x_1$, $ρ_2 = – x_2$.

Προτεινόμενη λύση

Από Vieta είναι $x_1 + x_2 = – β$ και $x_1 x_2 = γ$.

Η ζητούμενη εξίσωση θα είναι της μορφής $x^2 – Sx + P = 0$ **(1)**

$S = ρ_1 + ρ_2 = – x_1 + (– x_2) = – (x_1 + x_2) = –β$

$P = ρ_1\, ρ_2 = (– x_1)(– x_2) = x_1\, x_2 = γ$

Η (1) γίνεται $x^2 – βx + γ = 0$

14.

Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + βx + γ = 0$, συναρτήσει των β, γ να βρείτε δευτεροβάθμια εξίσωση που να έχει ρίζες $ρ_1 = 3x_1 - x_2$, $ρ_2 = 3x_2 - x_1$

Προτεινόμενη λύση

Από Vieta είναι $x_1 + x_2 = -β$ και $x_1 x_2 = γ$.

Η ζητούμενη εξίσωση θα είναι της μορφής $x^2 - Sx + P = 0$ **(1)**

$$S = ρ_1 + ρ_2 = 3x_1 - x_2 + 3x_2 - x_1$$
$$= 2x_1 + 2x_2$$
$$= 2(x_1 + x_2) = 2(-β) = -2β$$

$$P = ρ_1 ρ_2 = (3x_1 - x_2)(3x_2 - x_1)$$
$$= 9x_1 x_2 - 3x_1^2 - 3x_2^2 + x_1 x_2$$
$$= 10x_1 x_2 - 3(x_1^2 + x_2^2) \quad \textbf{(2)}$$

Αλλά $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$

Σχόλιο 4

$$= (-β)^2 - 2γ$$
$$= β^2 - 2γ$$

$$(2) \Rightarrow P = 10γ - 3(β^2 - 2γ)$$
$$= 10γ - 3β^2 + 6γ$$
$$= 16γ - 3β^2$$

Η ζητούμενη εξίσωση (1) θα είναι $x^2 + 2βx + 16γ - β^2 = 0$

15.

Να γραφεί δευτεροβάθμια εξίσωση, της οποίας οι ρίζες x_1, x_2 να ικανοποιούν τις σχέσεις $2x_1x_2 + x_1 + x_2 = -13$ και $x_1 + x_2 - x_1x_2 = 5$

Προτεινόμενη λύση

Η ζητούμενη εξίσωση θα είναι της μορφής $x^2 - Sx + P = 0$ **(1)**

Οι δοσμένες σχέσεις γίνονται

$$\begin{aligned}
&2P + S = -13 &&\text{και}\quad S - P = 5 \quad\Leftrightarrow\\
&2P + S = -13 &&\text{και}\quad S = 5 + P\\
&2P + 5 + P = -13 &&\text{και}\quad S = 5 + P\\
&3P = -18 &&\text{και}\quad S = 5 + P\\
&P = -6 &&\text{και}\quad S = 5 + P\\
&P = -6 &&\text{και}\quad S = 5 - 6\\
&P = -6 &&\text{και}\quad S = -1
\end{aligned}$$

Η (1) γίνεται $x^2 + x - 6 = 0$

16.

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \lambda x + 3 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, με ρίζες x_1, x_2. Να βρεθεί ο λ ώστε να ισχύει $x_1 = 3x_2$.

Προτεινόμενη λύση

Πρέπει
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\lambda \\ x_1x_2 = 3 \\ x_1 = 3x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_2 + x_2 = -\lambda \\ 3x_2x_2 = 3 \\ x_1 = 3x_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4x_2 = -\lambda \\ x_2^2 = 1 \\ x_1 = 3x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_2 = -\lambda \\ x_2 = 1 \text{ ή } -1 \\ x_1 = 3x_2 \end{cases}$$

- Για $x_2 = 1$, η εξίσωση $4x_2 = -\lambda \Leftrightarrow \lambda = -4$
- Για $x_2 = -1$, η εξίσωση $4x_2 = -\lambda \Leftrightarrow \lambda = 4$

17.

Αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x, y για τους οποίους ισχύει $y = -x^2 + 2x + 1$ να αποδείξετε ότι $y \le 2$.

Προτεινόμενη λύση

$y = -x^2 + 2x + 1 \iff x^2 - 2x + y - 1 = 0$ **(1)**

Η (1) είναι εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με άγνωστο x.

Επειδή $x \in \mathbb{R}$ (δηλαδή η εξίσωση έχει ρίζα) $\Rightarrow$ $\Delta \ge 0$

$4 - 4 \cdot 1 \cdot (y - 1) \ge 0$

$4 - 4y + 4 \ge 0$

$4y \le 8 \Rightarrow y \le 2$

18.

Αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x, y για τους οποίους ισχύει $3y + 2 = x^2 - x$,

να αποδείξετε ότι $y \ge -\dfrac{3}{4}$.

Υπόδειξη

$3y + 2 = x^2 - x \iff x^2 - x - (3y + 2) = 0$ και ακολουθούμε την άσκηση 17.